E.N.S.I. PHYSIQUE & MECANIQUE 1982

Programme P **DEUXIÈME ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES** (4 h)

N.B. — *Chacune des parties* II *et* III *peut être abordée après la question* 1 *de la partie précédente.*

Dans tout le problème, G_0 désigne le groupe multiplicatif des matrices carrées à coefficients réels, d'ordre deux et inversibles.

A tout élément $x = (x_1, x_2)$ de $\mathbb{R}^2$, on associe le carré de sa norme euclidienne, c'est-à-dire le nombre réel noté $\| x \|^2$ et défini par : $\| x \|^2 = x_1^2 + x_2^2$.

Enfin, $\mathbb{Z}^{2*}$ désigne l'ensemble des couples d'entiers relatifs différents de (0, 0) : $\mathbb{Z}^{2*} = \mathbb{Z}^2 - \{ (0, 0) \}$.

I

1. Soit $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ un élément de G_0. Pour tout élément $x = (x_1, x_2)$ de $\mathbb{R}^2$, on note $g(x)$ le couple (y_1, y_2) défini par

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

et l'on désigne par $m(g)$ la borne inférieure de l'ensemble $\{ \| g(x) \|^2 ; x \in \mathbb{Z}^{2*} \}$; préciser pourquoi cette borne existe.

On se propose de montrer la proposition (p) suivante : $m(g)$ est un minimum, c'est-à-dire il existe un élément x de $\mathbb{Z}^{2*}$ tel que $\| g(x) \|^2 = m(g)$.

a. On examine d'abord le cas où g est triangulaire supérieure ($c = 0$).

Montrer que l'ensemble des éléments x de $\mathbb{Z}^{2*}$ tels que $\| g(x) \|^2$ soit inférieur ou égal à un nombre positif donné est un ensemble fini.

En déduire que la proposition (p) est vérifiée dans ce cas.

b. On examine le cas général.

Montrer qu'il existe un nombre réel α tel que la matrice g_1 définie par $g_1 = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ soit triangulaire supérieure; montrer que $m(g_1) = m(g)$ et achever la démonstration de la proposition (p).

En déduire que $m(g)$ est strictement positive.

2° Désignant par a un nombre réel non nul, on étudie dans cette question le cas particulier où $g = \begin{pmatrix} a & \frac{a}{2} \\ 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix}$.

Soit (x_1, x_2) un élément de $\mathbb{Z}^{2*}$; examinant successivement les cas où x_2 est nul, impair, pair non nul, montrer que l'on a :

$$m(g) = \operatorname{Inf}\left(a^2, \frac{4}{a^2}, \frac{a^2}{4} + \frac{1}{a^2} \right).$$

Tracer sur un même graphique les courbes représentatives, pour $u > 0$, des fonctions

$$u \longmapsto u, \qquad u \longmapsto \frac{4}{u} \qquad \text{et} \qquad u \longmapsto \frac{u}{4} + \frac{1}{u}$$

et en déduire que $m(g) \leqslant \frac{2}{\sqrt{3}}$ en précisant les valeurs de a pour lesquelles $m(g) = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

II

Soit G l'ensemble des éléments de G_0 de déterminant égal à 1; G est un sous-groupe de G_0 (on rappellera pourquoi).

On se propose de montrer que, pour toute matrice g de G, l'on a :

$$m(g) \leqslant \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

1° Soit $\mathbb{C}^+$ l'ensemble des nombres complexes dont la partie imaginaire, notée « Im », est strictement positive : $\mathbb{C}^+ = \{ z ; \operatorname{Im}(z) > 0 \}$.

a. Soit $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ un élément de G et soit z un nombre complexe tel que : $cz + d \neq 0$. Montrer que

$$\operatorname{Im}\left(\frac{az + b}{cz + d} \right) = \frac{\operatorname{Im}(z)}{|cz + d|^2}$$

et en déduire que l'on peut définir une application, notée T_g, de $\mathbb{C}^+$ dans lui-même par :

.../...

$$T_g(z) = \frac{az + b}{cz + d}.$$

b. Montrer que, si g_1 et g_2 sont des éléments de G, l'on a :

$$T_{g_1 g_2} = T_{g_1} \circ T_{g_2}.$$

2° Soit Γ l'ensemble des éléments de G dont les quatre coefficients sont dans $\mathbf{Z}$. Vérifier que Γ est un sous-groupe de G.

On pose $s = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $t = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Soit z un élément donné de $\mathbf{C}^+$.

a. Montrer que l'ensemble $\{ \mathrm{Im}[T_\gamma(z)] \ ; \ \gamma \in \Gamma \}$ ne comporte qu'un nombre fini (éventuellement nul) d'éléments strictement supérieurs à $\mathrm{Im}(z)$. En déduire que cet ensemble admet un maximum que l'on note $M(z)$.

b. Soit γ_0 un élément de Γ tel que $\mathrm{Im}[T_{\gamma_0}(z)] = M(z)$.

Montrer, en considérant $T_{s\gamma_0}$, que $|T_{\gamma_0}(z)| \geqslant 1$.

Montrer, en considérant $T_{t\gamma_0}$, qu'il existe un élément γ_1 de Γ tel que $T_{\gamma_1}(z)$ ait sa partie imaginaire égale à $M(z)$ et sa partie réelle dans l'intervalle $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

En déduire que $M(z) \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$.

3° Soit g un élément de G. Montrer, en appliquant le dernier résultat ci-dessus au nombre $z = T_{{}^t g}(i)$ ($^t g$ désigne la transposée de g), que l'on a : $m(g) \leqslant \frac{2}{\sqrt{3}}$.

4° Proposer, en se ramenant au cas précédent, un majorant de $m(g)$ lorsque g appartient à G_0.

III

1° On désigne par $\mathfrak{G}$ l'ensemble $\{ T_g \ ; \ g \in G \}$ d'applications de $\mathbf{C}^+$ dans lui-même.

Montrer, grâce au résultat de la question 1° *b.* de la partie II, que $(\mathfrak{G}, o)$ est un groupe; quelle est l'application $(T_g)^{-1}$? Quels sont les éléments g de G tels que T_g soit l'application identique de $\mathbf{C}^+$? Étant donné un élément g de G, quels sont les éléments g' de G tels que $T_{g'} = T_g$?

2° A tout nombre réel α, on associe les matrices

$$h(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad k(\alpha) = \begin{pmatrix} \mathrm{ch}\,\alpha & \mathrm{sh}\,\alpha \\ \mathrm{sh}\,\alpha & \mathrm{ch}\,\alpha \end{pmatrix}.$$

A tout nombre réel λ strictement positif, on associe la matrice $l(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda} \end{pmatrix}$.

Vérifier que les ensembles $H = \{ h(\alpha) \ ; \ \alpha \in \mathbf{R} \}$, $K = \{ k(\alpha) \ ; \ \alpha \in \mathbf{R} \}$ et $L = \{ l(\lambda) \ ; \ \lambda > 0 \}$ sont des sous-groupes de G.

3° *a.* Quel est l'ensemble des matrices g de G telles que $T_g(i) = i$?

b. Soit z un élément de $\mathbf{C}^+$: $z = x + iy$. Montrer qu'il existe un élément (α, λ) de $\mathbf{R} \times \mathbf{R}_*^+$ et un seul tel que

$$z = T_{l(\lambda)\,k(\alpha)}(i).$$

On exprimera α et λ en fonction de x et y.

c. En déduire qu'étant donné un élément g de G, il existe un élément (h, k, l) de $H \times K \times L$ et un seul tel que $g = lkh$.

FIN

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail